Tutorato 3 GE220

Docente: Massimiliano Pontecorvo. Esercitatore: Raffaele Carbone.
Tutori: Giovanni Passeri. Bruno Renzi.
Giovedì 21 marzo 2018.

Esercizio 1. *Mostrare che se* X, Y *sono spazi topologici e* $C \subseteq X$, $D \subseteq Y$ *allora* $C \times D$ *è chiuso in* $X \times Y$.

Esercizio 2. *Siano* X, Y *spazi topologici.*

1. *Verificare che se* X, Y *sono* $N1$ *allora anche* $X \times Y$ *lo è.*
2. *Mostrare che se* X, Y *sono di Hausdorff se e solo se* $X \times Y$ *è Hausdorff.*
3. *Mostrare che se* X *è* T_0 *(i.e.: se per ogni coppia di punti* $x, y \in X$ *distinti esiste un intorno aperto di* x *che non contiene* y*) allora* $X \times Y$ *è* T_0.
4. *Mostrare che se* X *è Hausdorff, allora la diagonale* $\{(x, y) \in X^2 : x = y\}$ *è chiusa.*

Esercizio 3. *Sia* $X = \mathbb{R}$ *dotato della topologia cofinita* C. *Sia* $A \subset \mathbb{R}$ *finito, e* $Y = \mathbb{R}/\varrho$ *dove* $x\varrho y \iff x = y$ *oppure* $x, y \in A$:

1. *Dimostrare che la topologia quoziente su* Y *e' la cofinita*
2. *Dimostrare che se* $A = \mathbb{Z}$ *allora la topologia quoziente su* Y *non e' la cofinita.*

Esercizio 4. *In questo esercizio identificheremo* $\mathbb{R}$ *con l'asse* x *in* $\mathbb{R}^2$. *Consideriamo* $[-\pi, \pi] \subseteq \mathbb{R}$ *e sia* $X := [-\pi, \pi]/\sigma$ *dove* $\forall x, y \in [-\pi, \pi]$, $x\sigma y :\iff x, y \in \{-\pi, \pi\}$. *Sia poi* B *una base della topologia euclidea su* $\mathbb{R}$; *considerare* $A := \mathbb{R} \cup \{*\} \subseteq \mathbb{R}^2$, *(dove chiamiamo* $* := (0, 1) \in \mathbb{R}^2$*) con la topologia che ha per base* $B \cup \{(-\infty, -a) \cup (a, +\infty) \cup \{*\} : a \in \mathbb{R}_{>0}\}$

1. *Se* $p : [-\pi, \pi] \to X$ *è la proiezione sul quoziente, trovare la preimmagine tramite* p *di una base di intorni aperti di* $[\pi] \in X$.
2. *Mostrare che* A *ed* X *sono varietà topologiche.*
3. *Mostrare che* X *è omeomorfo ad* A.
4. *Mostrare che* X *(e quindi anche* A*) è omeomorfo ad* S^1.

Esercizio 5. *Considerare* $T := \{A \subseteq \mathbb{R} : A^C \subseteq \mathbb{Q}\}$

1. *Verificare che* T *è una topologia su* $\mathbb{R}$.
2. *Mostrare che con questa topologia* $\mathbb{R}$ *è* $N1$.